ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, να αποδείξετε ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = G(\beta)-G(\alpha)$$

Α2. Να δώσετε τους ορισμούς

α. του σημείου καμπής $A(x_0, f(x_0))$, μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f στο διάστημα (α, β).

β. του ορισμένου ολοκληρώματος $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ μιας συνεχούς συνάρτησης f στο [α,β].

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σ**ωστές ή **Λ**άθος.

α. Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδία ορισμού τα A και B αντίστοιχα. Αν $f(A)\cap B=\varnothing$, τότε δεν ορίζεται η $g\circ f$.

β. Αν η f(x) είναι κυρτή στο Δ, τότε $f''(x)>0$, για κάθε x∈Δ.

γ. Αν $\lim_{x\to x_0}|f(x)|=1$ τότε $\lim_{x\to x_0} f(x)=1$ ή $\lim_{x\to x_0} f(x)=-1$.

δ. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο [α,β] τότε $f([\alpha,\beta))=\left(\lim_{x\to\beta^-} f(x), f(\alpha)\right]$.

ε. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα [α ,β] , με f΄ συνεχή στο [α ,β], τότε ισχύει $\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\right)' = \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)dx$.

Α4. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή στο $[\alpha,\beta] \subset (0,+\infty)$ να αποδείξετε γεωμετρικά την ανίσωση:

$$f(\alpha)(\beta-\alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leq (\beta-\alpha)\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$$

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2+2+x\ln x}{x}, x>0$$

Β1. Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Β2. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Β3. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις ασύμπτωτες της συνάρτησης f.

Β4. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x-1}{1-x^2}$.

Γ1. Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο της f στο $x_0 = 1$.

Γ2. Να βρείτε τη μονοτονία της f.

Γ3. Να βρείτε μια αρχική συνάρτηση F της f στο διάστημα $(-\infty,-1)$ για την οποία να ισχύει ότι : $F(-2)=\ln 3$.

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(-3,-2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\dfrac{\ln 3-F(\xi)}{\xi+3}$

Γ5. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς ένα κοινό σημείο με την διχοτόμο 1ου και 3ου τεταρτημόριου στο $(0,1)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g, h, για τις οποίες ισχύει:

$[\ln g(x)]'=-2xg(x),\quad g(x)>0,\ \text{για κάθε } x\in R$, με g(0) = 1.

$h(x)=\dfrac{2e^x}{e^2-1}\cdot\displaystyle\int_0^1 h^2(x)dx,\ \text{για κάθε } x\in R,\ \text{με } h(x)\neq 0$

$f(x)=x+1+\ln(g(x)),\ \text{για κάθε } x\in R$

Δ1. Να βρείτε τους τύπους των συναρτήσεων g και h.

Για $g(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ και $h(x)=e^x$

Δ2. Να αποδείξετε ότι $h^{-1}(x)-x+1\leq 0,\ x>0$ και στη συνέχεια ότι η f είναι θετική και κοίλη στο [0, 1].

Δ3. Αν $I_\nu=\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-h^{-1}(e^{x^2}))^\nu dx$, να δειχθεί ότι: $I_\nu=\dfrac{2\nu}{2\nu+1}I_{\nu-1}$, ν≥2.

Δ4. Να δείξετε ότι $\dfrac{7}{6}\leq E\leq\dfrac{3}{2}$ όπου Ε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τους άξονες x΄x, y΄y και την ευθεία x=1.

Δ5. Να βρείτε τα σημεία καμπής της συνάρτησης $E(x) = -\ln\left(g(x)\right)$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $\left(\beta^2+1\right)^2 > (\alpha^2+1)(\gamma^2+1)$, αν $1<\alpha<\beta<\gamma$ και 2β=α+γ.