ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2024

ΘΕΜΑ Α

Α1] Έστω $f : A \to \iota R \quad 1-1$.

Να γράψετε τον ορισμό της f^{-1} (***ΜΟΝΑΔΕΣ 4***)

Α2] Έστω f συνάρτηση ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και xo ένα εσωτερικό σημείο του Δ.Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο xo και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό να αποδείξετε ότι $f'(xo) = O$. (***ΜΟΝΑΔΕΣ 7***)

Α3] Έστω ο ισχυρισμός: "Αν f γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ η παράγωγός της είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ".

i) Να χαρακτηρίσετε ως αληθή ή ψευδή τον ισχυρισμό(***ΜΟΝΑΔΕΣ 1***)

ii) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.(***ΜΟΝΑΔΕΣ 3***)

Α4] Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λάθος:

i) Η κατακόρυφη ασύμπτωτη μιας C_f δεν έχει κοινά σημεία με την C_f

ii) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\eta\mu\chi}{x} = o$

iii) Κάθε εφαπτόμενη μιας C_f έχει μοναδικό κοινό σημείο με την C_f

iv) Όταν η διαφορά f(x) - g(x) δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο [α,β] τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες x=α, x=β δίνεται από $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)|\, dx$.

v) Ο κύκλος αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης **(*ΜΟΝΑΔΕΣ 10*)**

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Έστω $f(x) = \begin{cases} h(x), x \leq \frac{1}{2} \\ x + a, \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ (1 - e^{-x+1}) \cdot \ln(x-1), 1 < x \leq 2 \end{cases}$ όπου αεR

Β1] Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \to 1} \frac{1 - e^{-x+1}}{x-1}$ **(*ΜΟΝΑΔΕΣ 6*)**

Β2] Να βρείτε το αεR ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο x_o=1 **(*ΜΟΝΑΔΕΣ 4*)**

B3] Για α=-1 να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ν ξ ε (1,2) τέτοιο ώστε η εφαπτόμενη της Gf στο Α (ξ, f(ξ)) να είναι παράλληλη προς τον άξονα x'x. (***ΜΟΝΑΔΕΣ 5***)

B4] Αν h δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ με h''(x) = h(x) για κάθε $x < \frac{1}{2}$, h(o) = 1 και h'(o) = o

i) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{h'(x)+h(x)}{e^x}$ είναι σταθερή (***ΜΟΝΑΔΕΣ 3***).

ii) να αποδείξετε ότι $(h(x) \cdot e^x)' = e^{2x}$ για κάθε $x < \frac{1}{2}$ (***ΜΟΝΑΔΕΣ 2***)

B5] Να αποδείξετε ότι $h(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ είναι ο τύπο της h. (***ΜΟΝΑΔΕΣ 5***)

ΘΕΜΑ Γ

Έστω μια f συνεχής στο ιR για την οποία ισχύει $f(x) = (10x^3 + 3x) \cdot \int_o^2 f(t)dt - 45$

Γ1] Να αποδείξετε ότι $f(x) = 20x^3 + 6x - 45, x\epsilon\iota R.$ **(*ΜΟΝΑΔΕΣ 5*)**

Γ2] Δίνεται μία συνάρτηση φ δύο φορές παραγωγίσιμη στο ιR.

Να αποδείξετε ότι $\varphi''(x) = \lim_{h\to o}\frac{\varphi'(x)-\varphi'(x-h)}{h}$. **(*ΜΟΝΑΔΕΣ 4*)**

Γ3] Αν ισχύει $\lim_{h\to o}\frac{\varphi(x+h) - 2\varphi(x) + \varphi(x-h)}{h^2} = f(x) + 45$ και φ(ο) = φ΄(ο) = 1

Να αποδείξετε ότι $\varphi(x) = x^5 + x^3 + x + 1, x\epsilon\iota R.$ **(*ΜΟΝΑΔΕΣ 6*)**

Γ4] Αν g(x) = φ(x) - 1, xειR

i) Να μελετήσετε την g ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι είναι αντιστρέψιμη **(*ΜΟΝΑΔΕΣ 3*)**

ii) Να αποδείξετε ότι $g(e^x) \geq g\,(x+1)$ για κάθε xειR

(*ΜΟΝΑΔΕΣ 2*)

Γ5] Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g^{-1}, τον x΄x και την ευθεία με εξίσωση x = 3. (***ΜΟΝΑΔΕΣ 5***)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = xlnx\_2x,\ x > o$ και $h(x) = 2 + (x-2)^2$ με $x \geq 2$ και $g(x) = \begin{cases} e^x - 1, x \leq o \\ xlnx, x > o \end{cases}$

Δ1] Να εξετάσετε την f ως προς τη γνήσια μονοτονία και να αποδείξετε ότι $lnx \geq 2 - \frac{e}{x}$ για κάθε x > o. (***ΜΟΝΑΔΕΣ 7***)

Δ2] Να εξετάσετε αν για την g ισχύει το θεώρημα Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού στο [-1,1]. (***ΜΟΝΑΔΕΣ 5***)

Δ3] Να αποδείξετε ότι h αντιστρέψιμη και να βρείτε την h^{-1}.

(***ΜΟΝΑΔΕΣ 4***)

Δ4] Αν E_1 το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την Cg, τον x’x και τις x=1, x=e

και αν E_2 το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την Cf, τον x’x και τις x=1, x=e

και αν E_3 το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_h, C_h-1

να αποδείξετε ότι E_1-E_2 = 3 · E_3. (***ΜΟΝΑΔΕΣ 9***)

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ-ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1] Σχολικό σελ. 35-36 **Α2]** Σχολικό σελ. 142

Α3] i) ψ ii) Σχολικό σελ. 136 **Α4]** i) Λ ii) Σ iii) Λ iv) Σ ν)Λ.

ΘΕΜΑ Β

Β1] $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1- e^{-x+1}}{x-1} = \left(\frac{o}{o}\right)$ $ΑΠΟ\ D.L.H. = \lim\limits_{x\to 1}\frac{e^{-x+1}}{1} = 1$

Β2] $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(1 - e^{-x+1}) \cdot \ln(x-1) = \lim\limits_{x\to +}\left[\frac{1- e^{-x-1}}{x-1}(x-1)\cdot \ln(x-1)\right] = 1\cdot 0 = 0$

Αφού $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)\cdot\ln(x-1) = \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{x-1}} =$

$\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)$ $ΑΠΟ\ P.L.H. = \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{(x-1)^2}} = \lim\limits_{x\to 1^+}(1-x) = 0$

f ΣΥΝΕΧΗΣ ΣΤΟ $x_o = 1$ αν και μόνο αν $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f'(1) \Leftrightarrow 1 + a = o \Leftrightarrow \boxed{a = -1}$

Β3] f συνεχής στο [1,2] και παραγωγίσιμη στο (1,2) ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = e^{-x+1}\ln(x-1) + \frac{1-e^{-x+1}}{x-1}$.

f(1) = f(2) = o.

Από θεώρημα Rolle υπάρχει ξε (1,2) : f'(ξ) = ο δηλαδή η εφαπτομένη της Cf στο A (ξ, $f_{(\xi)}$) είναι παράλληλη στον x'x.

B4] i) g παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων με

$$g'(x) = \frac{\left(h''(x)+h'(x)-h'(x)-h(x)\right)\cdot e^x}{(e^x)^2} \Leftrightarrow$$

$$g'(x) = \frac{e^x\left(h''(x)+h'(x)-h'(x)-h(x)\right)}{(e^x)^2} \Leftrightarrow g'(x) = \frac{h(x)-h(x)}{e^x} = 0$$

Άρα g(x) = c, cεR.

ii) $g(o) = \frac{h'(o)+h(o)}{e^o} = 1$ Άρα c = 1, $x < \frac{1}{2}$

Άρα $\frac{h'(x)+h(x)}{e^x} = 1 \Leftrightarrow h'(x) + h(x) = e^x \Leftrightarrow e^x h'(x) + e^x h(x) = e^{2x}$

Άρα $(h(x)\cdot e^x)' = e^{2x}$

B5] Από (B_4) $(h(x)\cdot e^x)' = \left(\frac{e^{ex}}{2}\right)'$

Άρα $h(x)\cdot e^x = \frac{e^{2x}}{2} + C_1,\ C_1 \varepsilon\iota R$

$h(o) = 1 \Leftrightarrow C_1 = \frac{1}{2}$.

Άρα $h(x) = \frac{e^{2x}+1}{2e^x} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{2x}}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \Leftrightarrow h(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1] Έστω $\int_0^2 f(t)dt = c\epsilon\iota R$. (1)

Άρα $f(x) = (10x^3 + 3x)\cdot c - 45 = 10cx^3 + 3cx - 45$ (2)

Η (1) γίνεται $\int_o^2 (10ct^3 + 3ct - 45)dt = c \Leftrightarrow$

$10c\int_0^2 t^3dt + 3c\int_o^2 tdt - 45\int_o^2 dt = c \Leftrightarrow$

$10\,c\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^2 + 3c\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^2 - 45\,(2-0) = c \Leftrightarrow$

$40c + 6c - 90 = c \Leftrightarrow c = 2$

Από (2): $f(x) = 20x^3 + 6x - 45, x\epsilon\iota R.$

Γ2] $\lim\limits_{h\to o}\frac{\varphi'(x)-\varphi'(x-h)}{h}$ θέτω $\underset{ά\rho\alpha\ u\to o}{-h = u}$

$\lim\limits_{u\to o}\frac{\varphi'(x)-\varphi'(x-4)}{-4} = \lim\limits_{u\to o}\frac{\varphi'(x+4)-\varphi'(x)}{4} = \varphi''(x)$

Γ3] $\lim\limits_{h\to o}\frac{\varphi\,(x+h)\,-\,2\varphi\,(x)+\varphi\,(x-h)}{h^2}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$ $A\Pi O\ D.L.H.$

$\operatorname{Lim}\limits_{h\to o}\frac{\varphi'(x+h)\,-\,\varphi'\,(x-h)}{2h} = \frac{1}{2}\lim\limits_{h\to o}\left(\frac{\varphi'(x+h)\,-\,\varphi'(x)}{h} + \frac{\varphi'(x)\,-\,\varphi'(x-h)}{h}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\varphi''(x) + \varphi''(x)\right) = \varphi''(x)$

Άρα $\varphi''(x) = f(x) + 45 = 20x^3 + 6x$

$\left(\varphi'(x)\right)' = (5x^4 + 3x^2)'$

Άρα $\varphi'(x) = 5x^4 + 3x^2 + C_1,\ C_1 \varepsilon\iota R$

$\varphi'(o) = 1$ άρα $C_1 = 1$ $\varphi'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1,\ x\varepsilon\iota R$

$\varphi'(x) = (x^5 + x^3 + x)'$ άρα $\varphi(x) = x^5 + x^3 + x + C_2,\ C_2 \varepsilon\iota R$

$\varphi(o) = 1$ άρα $C_2 = 1$ Τελικά $\varphi(x) = x^5 + x^3 + x + 1, x\varepsilon\iota R.$

Γ4] $g(x) = x^5 + x^3 + x,\ x\varepsilon\iota R$

i) $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$ *για κάθε* $x\varepsilon\iota R$

Άρα g γν. αύξουσα στο ιR, άρα και 1-1 οπότε ορίζεται g^{-1}

$g''^{(x)} = 20x^3 + 6x = 2x\,(10x^2 + 3)$

Για κάθε x > ο είναι $g''(x) > 0$ και για κάθε x < ο είναι $g''(x) < 0$

g συνεχής άρα g κυρτή στο $[0, +\infty]$ και κοίλη στο $(-\infty, 0]$.

ii) $g(e^x) \geq g(1 + x)$ g ΓΝ.ΑΥΞ.

$e^x \geq 1 + x$ που ισχύει από σελ. 148 σχολικό

εφαρμογή 2ii) για x βάζουμε e^x.

Γ5] $g^{-1}(x) \geq o$ g ΓΝ.ΑΥΞ.

$g(g^{-1}(x) \geq g(o) \Leftrightarrow x \geq o$

$E(\Omega) = \int_0^3 g^{-1}(x)dx \boxed{\Theta E T \Omega} g^{-1}(x) = 4 \Leftrightarrow x = g(u)$ και

dx = g'(u) du

Για x = o είναι g(u) = o = g(o) ⇔ u = o

Για x = 3 είναι g(u) = 3 = g(1) ⇔ u = 1

Επειδή uε [o, 1] είναι u ≥ o και g(u) ⇔ o

$E(\Omega) = \int_o^1 u \cdot g'(u)du = [u \cdot g(u)]_o^1 - \int_o^1 g(u)du = g(1) -$

$\int_o^1 (4^5 + u^3 + u)\ du = 3 - \left[\frac{u^6}{6} + \frac{u^4}{4} + \frac{u^2}{2}\right]_o^1 = 3 - \frac{11}{12} =$

$\frac{25}{12}$ τετρ. μοναδ.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1] Η f παραγωγίσιμη στο $(o,+\infty)$ με f'(x) = lnx -1

$f'(x) \geq o \Leftrightarrow lnx - 1 \geq o \Leftrightarrow x \geq e$

$f'(x) < o$ και f συνεχής στο (o,e] είναι γν. φθίνουσα στο (o,e].

$f'(x) > o$ και f συνεχής στο $(e,+\infty)$ είναι γν. φθίνουσα στο $(e,+\infty)$.

Η f έχει ελάχιστο το f(e) = elne - 2e = e - 2e = -e.

Άρα για κάθε x > o είναι $f(x) \geq f(e) \Leftrightarrow lnx - 2x \geq -e \Leftrightarrow x\beta nx \geq 2x - e \Leftrightarrow lnx \geq 2 - \frac{e}{x}$.

Δ2] $\lim\limits_{x \to o+} \frac{g(x)-g(o)}{x-o} = \lim\limits_{x \to o+} \frac{x\,lnx}{x} = \lim\limits_{x \to o+} lnx = -\infty$

Άρα η g δεν είναι παραγωγίσιμη στο o.

Άρα για την g δεν ισχύει το Θ.Μ.Τ.

Δ3] Η h παραγωγίσιμη στο $(2,+\infty)$ με h'(x) = 2(x-2)

Για κάθε x > 2 είναι h'(x) > o και επειδή h συνεχής $[2,+\infty)$

Είναι γν. αύξ., άρα 1-1.

$h(x) = y \Leftrightarrow 2 + (x-2)^2 = y \Leftrightarrow (x-2)^2 = y - 2$ $(y - 2 \geq o \Leftrightarrow y \geq 2)$

$|x-2| = \sqrt{y-2}$ όμως $x - 2 \geq o$

$x - 2 = \sqrt{y-2} \Leftrightarrow x = \sqrt{y-2} + 2$ με $x \geq 2$ που ισχύει

Άρα $h^{-1}(x) = \sqrt{x-2} + 2,\ D_f - 1 = [2, +\infty)$.

Δ4] $E_1 = \int_1^e |x\,lnx|\,dx$ όμως $x\,lnx \geq o$

$= \int_1^e x\,lnx\,dx = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2}\right)' \cdot lnx\,dx =$

$= \left[\frac{x^2}{2} \cdot lnx\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\int_1^e x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2-1}{4} \Leftrightarrow$

$E_1 = \frac{e^2+1}{4}$ τετρ. μον.

$E_2 = \int_1^e |f(x)|\,dx \quad 1 \leq x \leq e$

$f(1) \geq f(x) \geq f(e) \Leftrightarrow f(x) \leq f(1) = -2 < 0$

Άρα $\int_1^e (-f(x))dx = \int_1^e (-x\,lnx + 2x)dx = -\int_1^e \left(\frac{x^2}{2}\right)' lnxdx + [x^2]_1^e =$

$- \left[\frac{x^2}{2}\,lnx\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\,dx + e^2 - 1 = \frac{e^2}{2} - 1 - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow$

$E_2 = \frac{e^2-3}{4}$ τετρ. μον.

Αφού $h(x) - x = 2 + (x-2)^2 - x = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3) < 0$

Για κάθε xε(2,3) άρα h(x)<x, λόγω συμμετρίας

η Ch^{-1} από την y=x

Άρα $h^{-1}(x)>h(x)$ για κάθε $x_ε(2,3)$

$$E_3 = \int_2^3 \left(h^{-1}(x) - h(x)\right)dx = \int_2^3 \left[\sqrt{x-2} + 2 - 2 - (x-2)^2\right]dx =$$

$$= \int_2^3 \sqrt{x-2}\,dx - \int_2^3 (x-2)^2 dx = \frac{2}{3}\left[(x-2)^{\frac{3}{2}}\right]_2^3 - \left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_2^3 \Leftrightarrow$$

$$E_3 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\ \tau\varepsilon\tau\rho.\mu o\nu.$$

$$E_1 - E_2 = \frac{e^2+1}{4} - \frac{e^2+3}{4} = \frac{e^2+1+e^2+3}{4} = \frac{4}{4} = 1 = 3 \cdot \frac{1}{3} = 3 \cdot E_3\ .$$