# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

04-06-2024

## Θέμα Α

**Α1.** Θεωρία Σχολικό βιβλίο σελίδα 76

**Α2**.Θεωρία Σχολικό βιβλίο σελίδα 155

**Α3.** Θεωρία Σχολικό βιβλίο σελίδα 216

**Α4**.

Σ, Σ,Λ,Λ, Σ

## Θέμα Β

**Β1.** Η $f$ ορίζεται αν και μόνο αν:

$$\begin{cases} x \in D_g \\ x \in D_h \\ h(x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq 1 \\ \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$$

Άρα $D_f = (1, +\infty)$.

Για κάθε $x > 1$έχουμε :

$$f(x) = \left(\frac{g}{h}\right)(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{x+1}{x-1}$$

Η $r$ ορίζεται αν και μόνο αν :

$$\begin{cases} x \in D_g \\ x \in D_h \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Άρα $D_r = [1, +\infty)$.

Για κάθε $x \geq 1$ έχουμε :

$$r(x) = (g \cdot h)(x) = g(x)h(x) = x - \frac{1}{x}$$

**B2.**

Για κάθε $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ με $f(x_1) = f(x_2)$ έχουμε :

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1 + 1}{x_1 - 1} = \frac{x_2 + 1}{x_2 - 1} \Rightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η $f$ είναι $1-1$ συνεπώς αντιστρέφεται.

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow yx - y = x + 1 \Leftrightarrow x(y-1) = y + 1$$

Αν $y = 1$ είναι αδύνατη.

Για $y \neq 1$ έχουμε $x = \frac{y+1}{y-1}$.

Πρέπει $x > 1 \Leftrightarrow y > 1$.

Άρα για κάθε $y > 1$ η εξίσωση $y = f(x)$ έχει μοναδική λύση ως προς $x$.

Άρα $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}, x > 1$.

Άρα $f^{-1} = f$.

**B3.** Η $r$ είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$ άρα η γραφική της παράσταση δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Αναζητούμε ασύμπτωτη στο $+\infty$

Έχουμε :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{r(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(r(x)-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$$

Άρα η $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της $C_r$ στο $+\infty$.

Έχουμε :

**Β4.** Η εξίσωση ορίζεται αν και μόνο αν:

$$\begin{cases} x\in D_f \\ f(x)\in D_{f^{-1}} \\ x\in D_r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x>1.$$

Με $x>1$ έχουμε :

$$\left(f^{-1}\left(f(x)\right)\right)^2=1+4r(x)\Leftrightarrow x^2=1+4\left(x-\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow$$
$$x^3-4x^2-x+4=0\Leftrightarrow\left(x^2-1\right)(x-4)=0\Leftrightarrow x=4$$

**Θέμα Γ**

**Γ1.** Επειδή η συνάρτηση είναι συνεχής είναι συνεχής και στο $2$ ,άρα :

$$\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^+}f(x)=f(2)\Rightarrow e^{\lambda}=\lambda+1\Rightarrow e^{\lambda}-\lambda-1=0$$

Θεωρούμε συνάρτηση $\varphi(\lambda)=e^{\lambda}-\lambda-1$ Παρατηρούμε ότι έχει προφανή ρίζα το $\lambda=0$.

Η φ συνεχής στο πεδίο ορισμού της $\mathbb{R}$ επομένως

$\varphi'(\lambda)=e^{\lambda}-1$ με $\varphi'(\lambda)=0\Leftrightarrow\lambda=0$ , $\varphi'(\lambda)>0$ για $\lambda>0$ και $\varphi'(\lambda)<0$ για $\lambda<0$

Άρα για $\begin{matrix}\lambda>0\overset{\varphi'\nearrow}{\Leftrightarrow}\varphi'(\lambda)>\varphi'(0)\Leftrightarrow\varphi'(\lambda)>0 \\ \lambda<0\overset{\varphi'\nearrow}{\Leftrightarrow}\varphi'(\lambda)>\varphi'(0)\Leftrightarrow\varphi'(\lambda)>0\end{matrix}$ Άρα $\lambda=0$ μοναδική ρίζα .

**Γ2.** Έχουμε $f(x)=\begin{cases}-2x+5, 0\leq x<2 \\ -x^2+4x-3, x\geq 2\end{cases}$

Η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ με $f'(x)=-2<0$ για κάθε $x\in(0,2)$

Επίσης η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $(2,+\infty)$ με $f'(x)=-2(x-2)<0$

Τελικά για κάθε $x\in(0,2)\cup(2,+\infty)$ έχουμε $f'(x)<0$ και η $f$ είναι συνεχής στο $0$ και στο $2$ άρα η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$.

Για κάθε $x\geq 0$ έχουμε : $x\geq 0 \overset{f\searrow[0,+\infty)}{\Rightarrow} f(x)\leq f(0)$

Άρα η $f$ παρουσιάζει στο μηδέν ολικό μέγιστο το $f(0)=5$.

Το μοναδικό κρίσιμο σημείο είναι το $2$ όπου η $f$ δεν παρουσιάζει ακρότατο.

**Γ3.**

**i.**

Ελέγχουμε αν η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $2$ και έχουμε:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=-2 \text{ ενώ } \lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=0$$

Άρα η $f$ δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του ΘΜΤ στο $[0,3]$

**ii.** Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $\Delta$ και $E$ έχει κλίση $\lambda=\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=-\frac{5}{3}$

Επειδή η $f$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $2$ και $f'(x)=-2$ για κάθε $x\in[0,2)$ ,αναζητούμε $\xi\in(2,+\infty)$ τέτοιο ώστε :

$$f'(\xi)=-\frac{5}{3}\Leftrightarrow -2\xi+4=-\frac{5}{3}\Leftrightarrow \xi=\frac{17}{6}$$

Άρα υπάρχει $\xi\in(0,3)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της $f$ στο σημείο $\Gamma$ να είναι παράλληλη στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $\Delta$ και $E$.

**Γ4.** Έστω $M(2,y)$

Έχουμε $\varepsilon\varphi\omega=\frac{y}{2}$ ,άρα $\varepsilon\varphi\omega(t)=\frac{y(t)}{2}, t\geq 0$

Τότε $\omega'(t)\left(1+\varepsilon\varphi^2(\omega(t))\right)=\frac{y'(t)}{2}$ (1)

Έστω $t_0$ η χρονική στιγμή που το κινητό σημείο Μ συναντά την γραφική παράσταση της $f$. Τότε $y(t_0)=1$ άρα $εφ(ω(t_0))=\frac{1}{2}$ και συνεπώς επειδή $y'(t)=\frac{1}{2}$ για κάθε $t\geq 0$ από την σχέση $(1)$ έχουμε $ω'(t_0)=\frac{1}{5}$ rad/sec.

**Θέμα Δ**

**Δ1**. Επειδή το σύνολο τιμών της f είναι το $\left(-\infty,1+\frac{1}{e}\right]$ έχουμε ότι υπάρχει $x_0\in(0,+\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=1+\frac{1}{e}$ και $f(x)\leq f(x_0)$ για κάθε $x>0$.

Η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

Η $f$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0$, το $x_0$ είναι εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της $f$, συνεπώς από το θεώρημα Fermat έχουμε ότι $f'(x_0)=0\Rightarrow x_0=e$

Άρα $f(e)=1+\frac{1}{e}\Rightarrow \frac{1+αe}{e}=1+\frac{1}{e}\Rightarrow α=1$.

**Δ2**. Έχουμε $f(x)=\frac{\ln x+x}{x}, x>0$.

Επίσης $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}, x>0$

Η $f$ είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},1\right]$ και $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{2}-\ln 2}{\frac{1}{2}}=1-\ln 4=\ln\frac{e}{4}<0$ και $f(1)=1>0$

Από θεώρημα Bolzano για την $f$ έχουμε ότι υπάρχει $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

Η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,e]$ άρα δεν υπάρχει άλλη ρίζα στο $(0,e]$

Για κάθε $x>e$ ισχύει $f(x)=\frac{\ln x+x}{x}>0$ καθώς $\ln x>1$

Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα $x_0$ που ανήκει στο $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

**Δ3.**

i

Η εξίσωση $f(x)=f(4)$ έχουν προφανείς ρίζες τους αριθμούς $2$ και $4$

Έχουμε ότι $2\in(0,e]$ και $f(2)=f(4)$. Επειδή η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,e]$ η ρίζα είναι μοναδική στο διάστημα αυτό.

Εντελώς ανάλογα στο $[e,+\infty)$ έχει μοναδική ρίζα τον αριθμό $4$.

ii.

Για $x>0$ έχουμε :

$$2^x \le x^2 \Leftrightarrow \ln 2^x \le \ln x^2 \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x}+1\ge \frac{\ln 2}{2}+1 \Leftrightarrow$$
$$f(x)\ge f(2)\Leftrightarrow f(x)-f(2)\ge 0$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $\varphi(x)=f(x)-f(2), x>0$ για την οποία έχουμε :

$\varphi(x)=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=4$.

Άρα $\varphi(x)\ne 0$ για κάθε $x\in(0,2)$ για κάθε $x\in(2,4)$ και για κάθε $x>4$. Άρα σε καθένα από αυτά διατηρεί πρόσημο.

Έχουμε :

$$1<2\Rightarrow f(1)<f(2)\Rightarrow \varphi(1)<0 \text{ άρα } \varphi(x)<0 \text{ για κάθε } x\in(0,2)$$

$$e>2\Rightarrow f(e)>f(2)\Rightarrow \varphi(2)>0 \text{ άρα } \varphi(x)>0 \text{ για κάθε } x\in(2,4)$$

$$5>4\Rightarrow f(5)<f(4)\Rightarrow \varphi(5)<0 \text{ άρα } \varphi(x)<0 \text{ για κάθε } x>4$$

Τελικά έχουμε :

$$f(x)\ge f(2)\Leftrightarrow x\in[2,4]$$

**Δ4.**

Το εμβαδόν του χωρίου $\Omega$ που περικλείεται ανάμεσα στις ευθείες $x=-\ln 2$, $x=0$ τον άξονα $x'x$ και την γραφική παράσταση της $g$ είναι :

$$E(\Omega)=\int_{-\ln 2}^{0}|g(x)|dx$$

Για κάθε $x\in[-\ln 2,\ln x_0]$ έχουμε :

$$-\ln 2\le x\le \ln x_0 \Rightarrow \frac{1}{2}\le e^x\le x_0 \Rightarrow f(e^x)\le f(x_0)=0$$

Για κάθε $x\in[\ln x_0,0]$ έχουμε :

$$\ln x_0\le x\le 0 \Rightarrow x_0\le e^x\le 1 \Rightarrow f(e^x)\ge f(x_0)=0.$$

Άρα $f(e^x)\ge 0$ για κάθε $x\in[\ln x_0,0]$ και $f(e^x)\le 0$ για κάθε $x\in[-\ln x_0,0]$

Επίσης $\frac{1-x}{e^x}>0$ για κάθε $x\in[-\ln 2,0]$

Άρα έχουμε :

$$E(\Omega)=\int_{\ln x_0}^{0}g(x)dx-\int_{-\ln 2}^{\ln x_0}g(x)dx$$

Θέτουμε $y=e^x$ και έχουμε $dy=e^x dx$

Ενώ για $x=-\ln 2$ είναι $y=\frac{1}{2}$, για $x=0$ είναι $y=1$ και για $x=\ln x_0$ είναι $y=x_0$

Άρα:

$$E(\Omega)=-\int_{\frac{1}{2}}^{x_0}f(y)f'(y)dy+\int_{x_0}^{1}f(y)f'(y)dy=$$

$$-\frac{1}{2}\left[f^2(y)\right]_{\frac{1}{2}}^{x_0}+\frac{1}{2}\left[f^2(y)\right]_{x_0}^{1}=\frac{f^2(1)+f^2\left(\frac{1}{2}\right)}{2}=\left(2\ln^2 2-2\ln 2+1\right)\tau.\mu$$