

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 133

A2.

Έστω ότι $f(0) = f(1)$

Τότε η συνάρτηση ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0,1]$ οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$f'(\xi) = 0$ το οποίο είναι άτοπο αφού δίνεται πως $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,1)$. Οπότε ο ισχυρισμός είναι **αληθής**.

A3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 77

A4.

1. Σ
2. Λ
3. Σ
4. Σ
5. Σ

ΘΕΜΑ Β

B1. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$ (1), τότε:

$$f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \Leftrightarrow (f \circ f)(x_1) = (f \circ f)(x_2) \quad (2)$$

Από (2)-(1) και την αρχική ισότητα έχουμε:

$$(f \circ f)(x_1) - f(x_1) = (f \circ f)(x_2) - f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Επομένως η f είναι 1-1

B2. Για $x = 0$ στην αρχική ισότητα προκύπτει:

$$f(f(0)) = f(0) \stackrel{f:1-1}{\Leftrightarrow} f(0) = 0$$

Οπότε

$$f(g(x) - e^x - x + 1) = 0 \Leftrightarrow f(g(x) - e^x - x + 1) = f(0) \stackrel{f:1-1}{\Leftrightarrow} g(x) - e^x - x + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow g(x) = e^x + x - 1$$

B3. Θα πρέπει $g(x) > 0$

Είναι $g'(x) = e^x + 1 > 0$, άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα.

Επομένως $g(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) > g(0) \stackrel{g:\nearrow}{\Leftrightarrow} x > 0$

Οπότε $A_h = (0, +\infty)$

B4. Η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα, άρα είναι 1-1, οπότε αντιστρέφεται.

$$\text{Έχουμε: } g^{-1}(e^{x^2+1} + x^2) = 2 \stackrel{g:1-1}{\Leftrightarrow} e^{x^2+1} + x^2 = g(2) \Leftrightarrow e^{x^2+1} + x^2 + 1 - 1 = g(2) \\ \Leftrightarrow g(x^2 + 1) = g(2) \stackrel{g:1-1}{\Leftrightarrow} x^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για $x > 0$ έχουμε:

$$f'(x) = (x-1)' \ln x + (x-1)(\ln x)' = \ln x + \frac{x-1}{x}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{(x-1)'x - (x-1)(x)'}{x^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0 \text{ για κάθε } x > 0$$

Άρα η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

Παρατηρούμε ότι για $x = 1$ είναι $f'(1) = 0$

Για $x > 1$ είναι $f'(x) > f'(1) = 0$

Για $0 < x < 1$ είναι $f'(x) < f'(1) = 0$

Κατασκευάζουμε τον παρακάτω πίνακα μονοτονίας:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	+
$f(x)$			

Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A_1 = (0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $A_2 = [1, +\infty)$.

Επιπλέον η f είναι συνεχής συνάρτηση, άρα:

$$f(A_1) = \left[f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = [0, +\infty), \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} ((x-1)\ln x) = +\infty$$

$$f(A_2) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (0, +\infty), \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ((x-1)\ln x) = +\infty$$

$$\text{Συνεπώς } f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = [0, +\infty)$$

Γ₂. Για $x > 0$ έχουμε:

$$x^{x-1} = e^{2025} \Leftrightarrow \ln x^{x-1} = \ln e^{2025} \Leftrightarrow (x-1)\ln x = 2025 \Leftrightarrow f(x) = 2025$$

$2025 \in f(A_1)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 2025$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο A_1 και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A_1 η ρίζα θα είναι μοναδική.

$2025 \in f(A_2)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 2025$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο A_2 και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο A_2 η ρίζα θα είναι μοναδική.

Οπότε η εξίσωση $f(x) = 2025$ και άρα η ισοδύναμη αρχική της έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

Γ₃. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^x (f(x) - 2025)$

- Η g είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$
- Η g είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με $g'(x) = e^x (f(x) + f'(x) - 2025)$
- $g(x_1) = g(x_2) = 0$

Άρα από Θ. Rolle θα υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^\xi (f(\xi) + f'(\xi) - 2025) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) + f'(\xi) = 2025$$

Γ₄. Είναι $E = \int_1^e |f(x)| dx$

Για $x > 1$ είναι $x-1 > 0$ και $\ln x > 0$, άρα $f(x) > 0$

Οπότε

$$\begin{aligned} E &= \int_1^e f(x) dx = \int_1^e (x-1) \ln x dx = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - x \right)' \ln x dx = \left[\left(\frac{x^2}{2} - x \right) \ln x \right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{e^2}{2} - e - \int_1^e \left(\frac{x}{2} - 1 \right) dx = \frac{e^2}{2} - e - \left[\frac{x^2}{4} - x \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - e - \frac{e^2}{4} + e - \frac{3}{4} = \frac{e^2 - 3}{4} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$f(x)-1=\frac{2\ln x}{f(x)+1} \Leftrightarrow f^2(x)-1=2\ln x \Leftrightarrow f^2(x)=2\ln x+1 \Leftrightarrow |f(x)|=\sqrt{2\ln x+1}$$

Λύνουμε την εξίσωση :

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{2\ln x+1}=0 \Leftrightarrow 2\ln x=-1 \Leftrightarrow \ln x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=e^{-\frac{1}{2}}$$

Επομένως για κάθε $x \geq e^{-\frac{1}{2}}$ η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο (καθώς θα είναι $f(x) \neq 0$)

Όμως $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} - f(1) \right) x^3 + x^2 + 1 = +\infty$ άρα θα πρέπει να ισχύει :

$$\frac{1}{2} - f(1) \leq 0 \Leftrightarrow f(1) \geq \frac{1}{2} > 0$$

Επομένως θα ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x > e^{-\frac{1}{2}}$.

Άρα τελικά θα ισχύει : $f(x) = \sqrt{2\ln x+1}, x \geq e^{-\frac{1}{2}}$

Δ2.

Για κάθε $x_1, x_2 \in \left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty \right)$ με

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \Leftrightarrow 2\ln x_1 < 2\ln x_2 \Rightarrow 2\ln x_1 + 1 < 2\ln x_2 + 1 \Rightarrow \sqrt{2\ln x_1 + 1} < \sqrt{2\ln x_2 + 1}$$

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα είναι 1-1 και επομένως είναι αντιστρέψιμη.

Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης θα είναι το σύνολο τιμών της συνάρτησης f . Επειδή η f συνεχής και γνησίως αύξουσα λοιπόν θα έχουμε:

$$f(D_f) = f\left(\left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty \right)\right) = \left[f\left(e^{-\frac{1}{2}} \right), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [0, +\infty)$$

Οπότε λύνουμε την εξίσωση :

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \sqrt{2 \ln x + 1} \Leftrightarrow \frac{y^2 - 1}{2} = \ln x \Leftrightarrow x = e^{\frac{y^2 - 1}{2}}$$

Επομένως $f^{-1}(x) = e^{\frac{x^2 - 1}{2}}$ με $D_{f^{-1}} = [0, +\infty)$

Για να υπολογίσουμε το όριο πρέπει να βρούμε αρχικά τη δεύτερη παράγωγο.
Οπότε :

$$f'(x) = (\sqrt{2 \ln x + 1})' = \frac{1}{2\sqrt{2 \ln x + 1}} (2 \ln x + 1)' = \frac{1}{x\sqrt{2 \ln x + 1}}$$

Και

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{1}{x\sqrt{2 \ln x + 1}} \right)' = \frac{(1)' \cdot x\sqrt{2 \ln x + 1} - (x\sqrt{2 \ln x + 1})'}{(x\sqrt{2 \ln x + 1})^2} = \frac{-\sqrt{2 \ln x + 1} - \frac{1}{x\sqrt{2 \ln x + 1}} \cdot x}{x^2 (\sqrt{2 \ln x + 1})^2} = \\ &= -\frac{\sqrt{2 \ln x + 1} + \frac{1}{\sqrt{2 \ln x + 1}}}{x^2 (\sqrt{2 \ln x + 1})^2} = -\frac{(\sqrt{2 \ln x + 1})^2 + 1}{x^2 (\sqrt{2 \ln x + 1})^2} = -\frac{2 \ln x + 2}{x^2 (2 \ln x + 1) \sqrt{2 \ln x + 1}} \end{aligned}$$

$$\text{Άρα θα έχουμε ότι : } f''(e) = -\frac{2 \ln e + 2}{e^2 (2 \ln e + 1) \sqrt{2 \ln e + 1}} = -\frac{2 + 2}{e^2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}} = -\frac{4}{e^2 3 \sqrt{3}}$$

Επομένως τελικά το όριο θα δίνει το εξής αποτέλεσμα :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f''(e) \cdot f^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{4}{e^2 3 \sqrt{3}} \cdot e^{\frac{x^2 - 1}{2}} = -\infty$$

Δ3.

Έστω $K(\xi, f(\xi))$ το σημείο επαφής μεταξύ της C_f και της εφαπτομένης.

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο συγκεκριμένο σημείο θα είναι :

$$(\varepsilon): y - f(\xi) = f'(\xi)(x - \xi) \Leftrightarrow y = \frac{1}{\xi\sqrt{2 \ln \xi + 1}} x + \frac{2 \ln \xi}{\sqrt{2 \ln \xi + 1}}$$

Αφού η f διέρχεται από την αρχή των αξόνων θα έχουμε :

$$0 = \frac{1}{\xi\sqrt{2\ln \xi + 1}} \cdot 0 + \frac{2\ln \xi}{\sqrt{2\ln \xi + 1}} \Leftrightarrow \frac{2\ln \xi}{\sqrt{2\ln \xi + 1}} = 0 \Leftrightarrow \ln \xi = 0 \Leftrightarrow \xi = 1$$

Αντικαθιστώντας για $\xi = 1$ η ευθεία τελικά είναι η : $(\varepsilon): y = x$

Δ4.

Στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ η εξίσωση της εφαπτομένης είναι :

$$(\varepsilon): y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y = \frac{1}{x_0\sqrt{2\ln x_0 + 1}}x - \frac{1}{\sqrt{2\ln x_0 + 1}} + \sqrt{2\ln x_0 + 1}$$

Για να διέρχεται από το σημείο $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$ θα πρέπει να ισχύει :

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{x_0\sqrt{2\ln x_0 + 1}} \cdot 0 - \frac{1}{\sqrt{2\ln x_0 + 1}} + \sqrt{2\ln x_0 + 1} \Leftrightarrow \sqrt{2\ln x_0 + 1} - \frac{1}{\sqrt{2\ln x_0 + 1}} - \frac{1}{2} = 0$$

Θεωρώ συνάρτηση $h(x) = \sqrt{2\ln x + 1} - \frac{1}{\sqrt{2\ln x + 1}} - \frac{1}{2}, x \in [1, e]$.

- Η h συνεχής στο $[1, e]$ ως πράξη συνεχών συναρτήσεων.
- $h(1) = -\frac{1}{2} < 0$ και $h(e) = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} = \frac{5 - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} > 0$ επομένως
 $h(1) \cdot h(e) < 0$

Από το Θεώρημα Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, e)$ τέτοιο ώστε

$$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2\ln x_0 + 1} - \frac{1}{\sqrt{2\ln x_0 + 1}} - \frac{1}{2} = 0$$

Για κάθε $x_1, x_2 \in [1, e]$ με

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \Leftrightarrow 2\ln x_1 < 2\ln x_2 \Rightarrow 2\ln x_1 + 1 < 2\ln x_2 + 1 \Rightarrow \sqrt{2\ln x_1 + 1} < \sqrt{2\ln x_2 + 1}$$

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 &\Rightarrow \sqrt{2\ln x_1 + 1} < \sqrt{2\ln x_2 + 1} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\ln x_1 + 1}} > \frac{1}{\sqrt{2\ln x_2 + 1}} \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2\ln x_1 + 1}} < -\frac{1}{\sqrt{2\ln x_2 + 1}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{2\ln x_1 + 1}} - \frac{1}{2} < -\frac{1}{\sqrt{2\ln x_2 + 1}} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Εκτελώντας πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει τελικά ότι η h είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση. Άρα το x_0 είναι μοναδική ρίζα.

Δ5.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow e} \frac{xf(x) - ef(e)}{x - e} &= \lim_{x \rightarrow e} \frac{xf(x) - xf(e) + xf(e) - ef(e)}{x - e} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{x(f(x) - f(e)) - f(e)(x - e)}{x - e} = \\ &= ef'(e) - f(e) = e \frac{1}{e\sqrt{3}} - \sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}\end{aligned}$$