

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν :

- Η f είναι συνεχής στο Δ
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ

Τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

A2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

« Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και ισχύει $f'(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in (0,1)$ τότε $f(0) \neq f(1)$ »

- Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό ως Αληθή ή Ψευδή
- Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

A3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής.

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λάθος :

1. Αν μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει την γραφική της παράσταση το πολύ σε ένα σημείο.
2. Για κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
3. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

4. Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.
5. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:

- $(f \circ f)(x) = x + f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(g(x) - e^x - x + 1) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

B1. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1

B2. Να βρείτε τη συνάρτηση g

Αν $g(x) = e^x + x - 1$, τότε:

B3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x) = \ln(g(x))$

B4. Να αποδείξετε ότι η g αντιστρέφεται και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $g^{-1}(e^{x^2+1} + x^2) = 2$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)\ln x$, $x > 0$

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1} = e^{2025}$, $x > 0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες

Γ3. Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) + f(\xi) = 2025$

Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=e$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \left[e^{-\frac{1}{2}}, +\infty \right) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f(x)-1 = \frac{2\ln x}{f(x)+1}, \quad x \geq e^{\frac{1}{2}}$$

Αν επιπλέον ισχύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} - f(1) \right) x^3 + x^2 + 1 = +\infty \text{ τότε :}$$

Δ1. Να βρείτε τον τύπο της f .

Δ2. Αν $f(x) = \sqrt{2\ln x + 1}$, να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται, να βρείτε την f^{-1} και να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f''(e) \cdot f^{-1}(x)$

Δ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f , η οποία άγεται από την αρχή των αξόνων.

Δ4. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1, e)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ να διέρχεται από το σημείο $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$

Δ5. Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-1}{x-1}$ και $\lim_{x \rightarrow e} \frac{xf(x)-ef(e)}{x-e}$