

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέμα Α

A1. Σχολικό σελίδα 217.

A2. α. Ψ.

β. Σχολικό σελίδα 124.

A3. Σχολικό σελίδα 142.

A4. α – Α, β – Ψ (μπορεί να μην ορίζεται η f'), γ – Ψ (μπορεί $f''(x)=0$),
δ – Ψ, ε – Α

Θέμα Β

B1.

$$f'(x) = 2x - 4x \ln x - 2x = -4x \ln x$$

$$f'(x) \geq 0 \Rightarrow -4x \ln x \geq 0 \Rightarrow \ln x \leq 0 \Rightarrow x \leq 1$$

x	0	1	$+\infty$
f'		+	-
f		↗	↘

T.M=f(1)=1

Για $x \in (0,1]$ f γνησίως αύξουσα

Για $x \in [1,+\infty)$ f γνησίως φθίνουσα

Για $x=1$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο, το $f(1)=1$.

Αφού η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο, το $f(1)=1$, έχουμε ότι:

$$f(x) \leq 1 \Rightarrow x^2 - 2x^2 \ln x \leq 1 \Rightarrow 1 - 2 \ln x \leq \frac{1}{x^2} \Rightarrow 2 \ln x \geq 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow \ln x^2 \geq 1 - \frac{1}{x^2}.$$

B2.

$$f''(x) = -4 \ln x - 4 = -4(\ln x + 1)$$

$$f''(x) \geq 0 \Rightarrow -4(\ln x + 1) \geq 0 \Rightarrow \ln x + 1 \leq 0 \Rightarrow \ln x \leq -1 \Rightarrow x \leq \frac{1}{e}$$

x	0	1/e	$+\infty$	Για $x \in (0,1]$ f κυρτή
f'		+	0	Για $x \in [1,+\infty)$ f κοίλη
f		↖	↗	Για $x=1$ η f παρουσιάζει σημείο καμπής, το $(1,-1/e^2)$.
	Σ.Κ.(1,f(1/e))			

Θα βρούμε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμπής.

$$\varepsilon: y - f\left(\frac{1}{e}\right) = f'\left(\frac{1}{e}\right)\left(x - \frac{1}{e}\right) \Rightarrow y - \frac{3}{e^2} = \frac{4}{e}\left(x - \frac{1}{e}\right) \Rightarrow y = \frac{4}{e}x - \frac{1}{e^2}.$$

Γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμπής " διαπερνά " την C_f .

B3.

$$g(x) = e^{\frac{x-1}{2}}, A_g = \mathbb{R} \text{ και } g'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x-1}{2}} > 0$$

Η g λοιπόν είναι γνησίως αύξουσα, επομένως και 1-1, άρα η g αντιστρέφεται.

$$g(x) = y \Rightarrow e^{\frac{x-1}{2}} = y, y > 0$$

$$\frac{x-1}{2} = \ln y \Rightarrow x = 1 + 2 \ln y, y > 0$$

$$\text{Άρα } g^{-1}(x) = 1 + 2 \ln x, x > 0$$

B4.

$$g^{-1}(\sin x) = (\varepsilon f x)' \Rightarrow 1 + 2 \ln(\sin x) = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow \sin^2 x + 2 \sin^2 x \cdot \ln(\sin x) = 1 \Rightarrow$$

$$g(\sin x) = 1 \Rightarrow g(\sin x) = g(1) \xrightarrow{g \nearrow, \text{άρα } 1-1} \sin x = 1 \Rightarrow x = 0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Θέμα Γ

Γ1.

Θα λύσουμε την εξίσωση $f(x) = h(x)$.

$$f(x) = h(x) \Rightarrow \ln(x^2 + 1) = 2^{\sin x} - 2, \text{ προφανής ρίζα η } x=0.$$

$$\sin x \leq 1 \Rightarrow 2^{\sin x} \leq 2 \Rightarrow 2^{\sin x} - 2 \leq 0 \Rightarrow h(x) \leq 0$$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

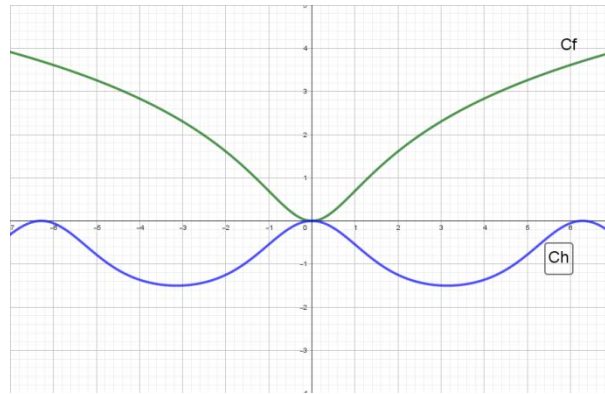
Για $x \in (-\infty, 0]$, f γνησίως αύξουσα και για $x \in [0, +\infty)$, f γνησίως φθίνουσα
 άρα για $x = 0$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο (που είναι και ολικό), δηλαδή
 $f(x) \geq f(0) \Rightarrow f(x) \geq 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$.

$h(0)=0$, άρα η εξίσωση $f(x)=h(x)$ έχει μοναδική λύση την $x=0$.

Κοινό σημείο των C_f και C_g είναι λοιπόν το $O(0,0)$.

$$h'(x) = 2^{\sin x} \cdot (\sin x)' = -\eta \mu x \cdot 2^{\sin x}, \quad \text{άρα } h'(0) = 0$$

Αφού $f(0) = h(0) = 0$ και $f'(0) = h'(0) = 0$ οι C_f και C_h δέχονται κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο $(0,0)$.



Γ2.

$$|2g(x) + 5x - 4| \leq |f'(x)| \Rightarrow |2g(x) + 5x - 4| \leq \left| \frac{2x}{x^2 + 1} \right| \Rightarrow -\left| \frac{2x}{x^2 + 1} \right| \leq 2g(x) + 5x - 4 \leq \left| \frac{2x}{x^2 + 1} \right|$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2} = 0, \text{ επομένως } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\left| \frac{2x}{x^2 + 1} \right| \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{2x}{x^2 + 1} \right| = 0$$

$$\text{και από κριτήριο παρεμβολής } \lim_{x \rightarrow +\infty} (2g(x) + 5x - 4) = 0 \Rightarrow 2 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(g(x) + \frac{5}{2}x - 2 \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(g(x) - \left(-\frac{5}{2}x + 2 \right) \right) = 0. \text{ Άρα η ευθεία } y = -\frac{5}{2}x + 2 \Rightarrow 5x - 2y - 4 = 0$$

είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

Γ3.

$g(x^2) \geq g(4x) \Leftrightarrow g(x^2) - g(4x) \geq 0$. Θέτω $h(x) = g(x^2) - g(4x) \geq 0$ (1). Για $x=2$,

$h(2) = g(4) - g(8) = 0$, άρα η (1) γίνεται: $h(x) \geq h(2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δηλαδή για $x=2$ η $h(x)$ παρουσιάζει ελάχιστο και αφού είναι παραγωγίσιμη, με $h'(x) = 2x \cdot g'(x) - 4 \cdot g'(4x)$ από Θ. Fermat, $h'(2) = 0$.

Άρα $h'(2) = 0 \Leftrightarrow 4g'(2) - 4g'(8) = 0 \Leftrightarrow g'(2) = g'(8)$.

Η $g'(x)$ είναι συνεχής στο $[2,8]$ ως παραγωγίσιμη

Η $g'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(2,8)$

$g'(2) = g'(8)$

από Θ. Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (2,8)$ με $g''(x_0) = 0$, δηλαδή η C_g έχει τουλάχιστον ένα πιθανό σημείο καμπής $A(x_0, g(x_0))$, με $x_0 \in (2,8)$.

Γ4.

$f''(x) = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} < 0$ για $x > 1$, άρα $f'(x) \searrow$ και επομένως $1-1$.

$$\frac{x'(t)}{y'(t)} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{4}{5}$$

$$y(t) = f(x(t)) \Rightarrow y'(t) = [f(x(t))]' \Rightarrow y'(t) = f'(x(t)) \cdot x'(t) \Rightarrow$$

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = f'(x(t)) \Rightarrow \frac{4}{5} = f'(x(t)) \Rightarrow f'(x(t)) = f'(2) \xrightarrow{f' \searrow, \text{ άρα } 1-1} \Rightarrow$$

$$x(t) = 2 \text{ και } y(t) = \ln 5.$$

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $M(1, \ln 5)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$\int_{f(0)}^{f(1)} f^{-1}(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{e+1}$$

$$I = \int_{f(0)}^{f(1)} f^{-1}(x) dx \quad \text{Θέτω } u = f^{-1}(x) \Rightarrow f(u) = x \Rightarrow f'(u) du = dx$$

$$x = f(1) \Rightarrow u = 1$$

$$x = f(0) \Rightarrow u = 0$$

$$I = \int_0^1 u f'(u) du = [u f(u)]_0^1 - \int_0^1 f(u) du = f(1) - \int_0^1 f(u) du$$

$$\text{Άρα } \int_{f(0)}^{f(1)} f^{-1}(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{e+1} \Rightarrow f(1) - \int_0^1 f(u) du + \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{e+1} \Rightarrow f(1) = \frac{1}{e+1}$$

$$f'(1) = -e \cdot f^2(1) = -e \cdot \left(\frac{1}{e+1} \right)^2 = \frac{-e}{(e+1)^2}$$

Δ2.

$$f(x) \cdot f''(x) - 2(f'(x))^2 = -e^x f^3(x) \Rightarrow f^2(x) \cdot f''(x) - 2f(x)(f'(x))^2 = -e^x f^4(x) \Rightarrow$$

$$\frac{f^2(x) \cdot f''(x) - 2f(x)(f'(x))^2}{f^4(x)} = -e^x \Rightarrow \left(\frac{f'(x)}{f^2(x)} \right)' = (-e^x)' \Rightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = -e^x + c \Rightarrow$$

$$\frac{-e}{(e+1)^2} = -e + c \Rightarrow c = 0. \quad \text{Άρα } f(x) = \frac{1}{e^x + 1}.$$

$$\text{Άρα } f'(x) = \frac{-e^x}{e^x + 1} < 0 \quad \text{και} \quad f''(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{(1 + e^x)^3}.$$

$$f''(x) \geq 0 \Rightarrow e^{2x} - e^x \geq 0 \Rightarrow e^x(e^x - 1) \geq 0 \Rightarrow e^x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

$x \rightarrow -\infty$	0	$+\infty$
f''	-	+
f	0	+

ΣΚ (0,1/2)

Η f παρουσιάζει καμπή στο σημείο (0,1/2).

Εξίσωση εφαπτομένης στο (0,1/2)

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}x \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}.$$

Δ3.

$$\frac{\alpha f'(\alpha) - f(2\alpha) + f(\alpha)}{x-1} = \frac{4f(\alpha) + \alpha - 2}{x-2} \Rightarrow$$

$$(x-2)(\alpha f'(\alpha) - f(2\alpha) + f(\alpha)) - (x-1)(4f(\alpha) + \alpha - 2) = 0$$

$$\text{Θέτω } g(x) = (x-2)(\alpha f'(\alpha) - f(2\alpha) + f(\alpha)) - (x-1)(4f(\alpha) + \alpha - 2)$$

Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική.

$$g(1) = -\alpha f'(\alpha) + f(2\alpha) - f(\alpha) \text{ και } g(2) = -4f(\alpha) - \alpha + 2$$

$g(1) > 0$ και $g(2) < 0$ γιατί:

- Η f είναι κυρτή στο $[0, 2]$, άρα βρίσκεται "πάνω" από την εφαπτομένη της, δηλαδή $f(x) \geq -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \Rightarrow 4f(x) + x - 2 \geq 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=0$.

$$\text{Άρα } -4f(x) - x + 2 \leq 0 \Rightarrow 4f(\alpha) - \alpha + 2 \leq 0 \Rightarrow g(2) < 0$$

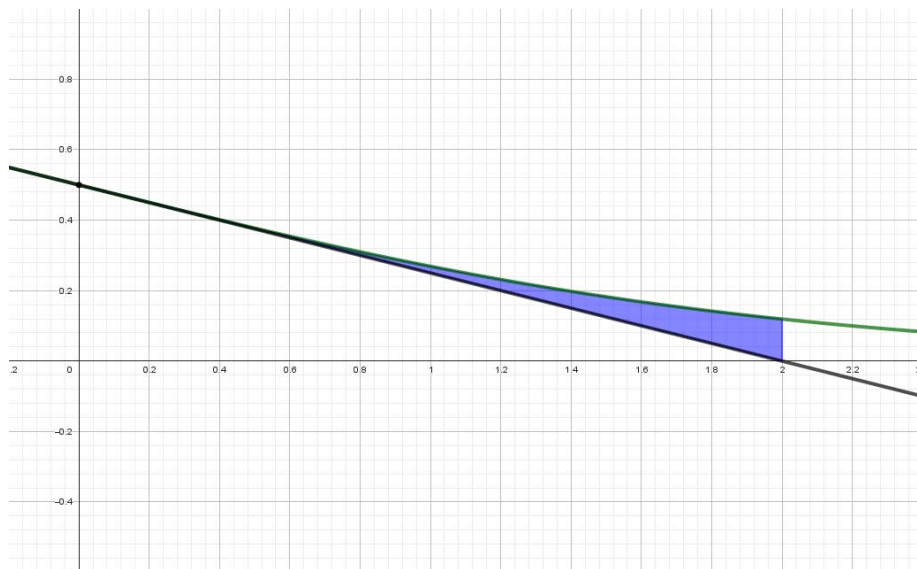
- Για $x > 0$, $f''(x) > 0$ άρα $f'(x)$ Γνησίως αύξουσα.
Η f συνεχής στο $[\alpha, 2\alpha]$, ως πηλίκιο συνεχών.
Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(\alpha, 2\alpha)$, άρα από Θ.Μ.Τ. υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$\xi \in (\alpha, 2\alpha) \text{ με } f'(\xi) = \frac{f(2\alpha) - f(\alpha)}{2\alpha - \alpha} = \frac{f(2\alpha) - f(\alpha)}{\alpha}.$$

$$\xi > \alpha \Rightarrow f'(\xi) > f'(\alpha) \Rightarrow \frac{f(2\alpha) - f(\alpha)}{\alpha} > f'(\alpha) \Rightarrow -\alpha f'(\alpha) - f(2\alpha) + f(\alpha) > 0 \Rightarrow g(1) > 0.$$

Από θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, 2)$ με $g(x_0) = 0$, που είναι μοναδικό αφού η g είναι πολυωνυμική 1^{ου} βαθμού.

Δ4.



$$E = \int_0^2 \left| f(x) - \left(-\frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \right) \right| dx = \int_0^2 \left(f(x) + \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} \right) dx = \int_0^2 \frac{1}{1+e^x} dx + \int_0^2 \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{2} \right) dx$$

$$\int_0^2 \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{2} \right) dx = \left[\frac{x^2}{8} - \frac{x}{2} \right]_0^2 = -\frac{1}{2}$$

$$\int_0^2 \frac{1}{1+e^x} dx \quad \text{θέτω } u=1+e^x \Rightarrow e^x=u-1$$

$$du=e^x dx, \quad \text{για } x=2 \Rightarrow u=1+e^2$$

$$\text{για } x=0 \Rightarrow u=2$$

$$I = \int_0^2 \frac{1}{1+e^x} dx = \int_2^{1+e^2} \frac{1}{u(u-1)} du$$

$$\frac{1}{u(u-1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-1} = \frac{(A+B)u-A}{u(u-1)} \quad \text{Πρέπει } \begin{cases} A+B=0 \\ A=-1 \end{cases} \begin{cases} A=-1 \\ B=1 \end{cases}$$

$$I = \int_2^{1+e^2} \left(\frac{-1}{u} + \frac{1}{u-1} \right) du = \left[-\ln|u| + \ln|u-1| \right]_2^{1+e^2} = 2 + \ln \frac{2}{1+e^2}$$

$$\text{Τελικά το ζητούμενο εμβαδόν ισούται με } E = 2 + \ln \frac{2}{1+e^2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} + \ln \frac{2}{1+e^2}$$